FUNZIONI LOGARITMICHE

Esercizi svolti dal prof. Gianluigi Trivia (gianluigi.trivia@gmail.com)

Sintesi definizioni e proprietà

Data una potenza a^b, essa è composta da due parti numeriche, la base a e l'esponente b. Se si conosce sia il valore di a che il valore di b, la si può calcolare moltiplicando tante volte per se stessa la base a quante sono indicate dall'esponente, cioè, ad. es. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

Se non la base è incognita, mentre l'esponente è noto, si hanno le cosiddette forme polinomiali, come $x+1$, x^2-3x+5, x^3-3x^2+5x-4, ecc. Queste forme sono state studiate nell'ambito dei polinomi e delle equazioni di diverso grado.

Se abbiamo una scrittura del tipo $x^3 = 27$, possiamo ricavare il valore della base mediante l'operazione inversa, detta estrazione di radice, cioè $x = \sqrt[3]{27} = 3$.

Se invece si conosce il valore della base mentre l'esponente è incognito, abbiamo le cosiddette forme esponenziali, del tipo 2^x, 3^x, ecc. con le condizioni che la base sia un numero > 0.

Se si ha una equazione del tipo $2^x = 5$, dove non è in nessun caso possibile ricondurre i due membri a una potenza con la stessa base, l'operazione inversa che consente di ricavare l'esponente cercato è detta "**logaritmo**" e si indica comunemente con "**log**", ed è definita da, se

$$2^x = 5 \quad x = \log_2 5$$

dove la scrittura $\log_2 5$, dove 2 è detta la base del logaritmo (così come era la base della potenza) e 5 è detto l'argomento del logaritmo. In generale

Definizione. Il logaritmo in base a di un numero b è l'esponente da attribuire alla base a per ottenere una potenza uguale a b.

$$x = \log_a b \longleftrightarrow a^x = b \quad con\ a > 0 \wedge a \neq 1,\ b > 0$$

Anche per i logaritmi valgono delle proprietà che si possono considerare le inverse di quelle delle potenze.

Logaritmo di una base formata da un prodotto di fattori

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Logaritmo di una base formata da un quoziente

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Logaritmo di una base esprimibile sotto forma di una potenza

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

Per agevolare il calcolo di questa operazione è possibile introdurre una formula che consente di trasformare in logaritmo in una certa base in un logaritmo con una base più conveniente per il calcolo

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

cioè

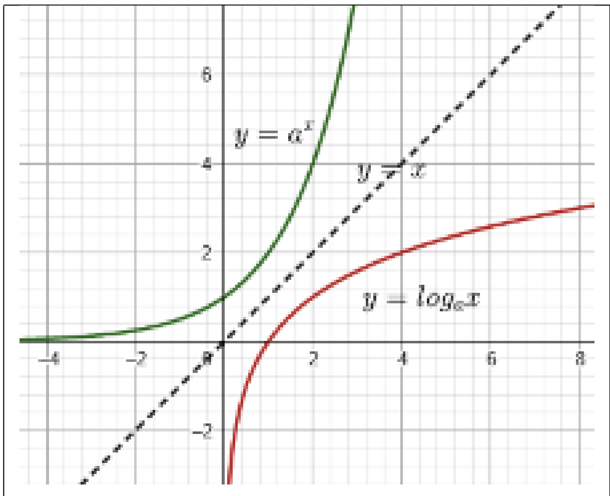
$$\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5}$$

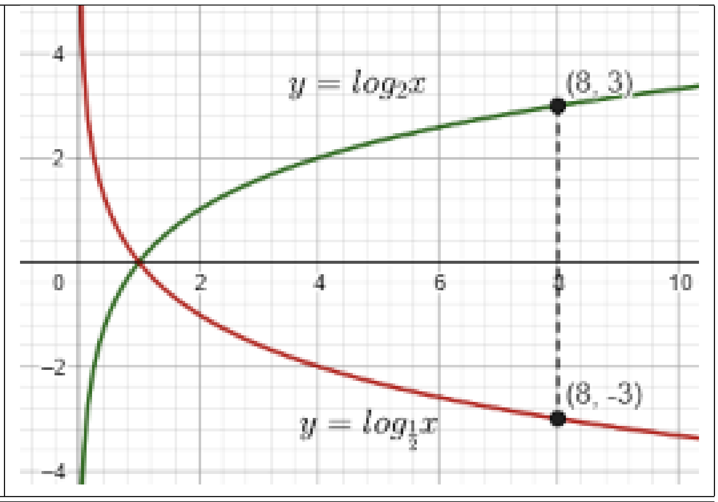
Nel calcolo comune si utilizzano in particolare i logaritmi di base 10 (il nostro sistema di numerazione è decimale, cioè 10 unità sono uguali a 1 decina, ecc.) e i logaritmi in base e.

Se si ha un logaritmo il cui argomento è rappresentato da una variabile x si parla ancora di funzione logaritmica, definita da $y = \log_a x$.

Il dominio di questa funzione è l'insieme dei numeri reali, cioè $x \in \mathbb{R}^+$, mentre il codominio sarà dato da tutti i valori reali di y, cioè $y \in \mathbb{R}$. Come si vede la funzione esponenziale e quella logaritmica scambiano tra loro dominio col codominio.

Poiché la funzione logaritmica è l'inversa di quella esponenziale, il suo grafico sarà il simmetrico di quello dell'esponenziale rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.





f. esponenziale - f. log	log con basi una reciproca dell'altra

La funzione $y = \log_a x$ dove $0 < a < 1$ è una funzione decrescente (in rosso a dx), mentre per $a > 1$ la funzione è crescente. Entrambe intersecano sempre l'asse x nel punto di ascissa 1.

ESERCIZI

Calcolo dei logaritmi, senza calcolatrice

Esercizio 1. Applicando definizioni e proprietà dei logaritmi, calcola

$$\log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{4} \quad \log_4 16 \quad \log_5 \tfrac{1}{5} \quad \log_{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Soluzione. Avremo

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

(ragionamento: qual è l'esponente da attribuire a $\frac{1}{2}$ affinché sia uguale a $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$$

$$\log_5 \left(\frac{1}{5}\right) = \log_5 (5)^{-1} = -1$$

$$\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 2. Applicando definizioni e proprietà dei logaritmi, calcola

$$\log_2 \sqrt{2} \quad \log_e \sqrt{e} \quad \log_{16} 4^{-\frac{1}{3}}$$

Soluzione. Avremo

$$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 (2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\log_e \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

(il logaritmo di base e è per convenzione scritto con il simbolo abbreviato ln)

$$\log_{16} 4^{-\frac{1}{3}} = \log_{16} (16)^{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{6}$$

($16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$, per cui $16^{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} = 16^{-\frac{1}{6}}$)

Esercizio 3. Dato il valore del logaritmo e della base, determinare l'argomento, x, del logaritmo

$$\log_2 x = 2$$

Soluzione. Applichiamo la definizione di logaritmo, per la quale

$$2^2 = x \quad x = 4$$

Esercizio 4. Dato il valore del logaritmo e della base, determinare l'argomento, x, del logaritmo

$$\log_{\frac{3}{2}} x = -2 \quad \log_{\frac{3}{5}} x = -1 \quad \log_{\sqrt{2}} x = \tfrac{2}{3} \quad \log_{81} x = -\tfrac{1}{4}$$

Soluzione. Applichiamo la definizione di logaritmo, per la quale

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^{-2} = x \quad x = \tfrac{4}{9}$$

$$\left(\tfrac{3}{5}\right)^{-1} = x \quad x = \tfrac{5}{3}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}} = x \quad x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$81^{-\frac{1}{4}} = x \quad x = \sqrt[4]{\tfrac{1}{81}} = \tfrac{1}{3}$$

Esercizio 5. Determinare la base dei seguenti logaritmi

$$\log_x 9 = 2 \quad \log_x \tfrac{1}{4} = -2 \quad \log_x 64 = 6 \quad \log_x 27 = -3$$

Soluzione. Applichiamo la definizione di logaritmo, ricordando che la base è sempre un numero positivo

$$x^2 = 9 \quad x = 3$$

$$x^{-2} = \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{x^2} = \tfrac{1}{4} \quad x = 2$$

$$x^6 = 2^6 \quad x = 2$$

$$x^{-3} = 27 \quad x = \tfrac{1}{3}$$

Esercizio 6. Applicando i teoremi sui logaritmi, calcola

$$\log_2 (4 \cdot 32 \cdot 128)$$

Soluzione. Applichiamo il teorema del logaritmo di un prodotto

$$\log_2 4 + \log_2 32 + \log_2 128 = \log_2 2^2 + \log_2 2^5 + \log_2 2^7$$

$$2 + 5 + 7 = 14$$

(si può fare anche)

$$\log_2 \left(2^{14}\right) = 14$$

Esercizio 7. Applicando i teoremi sui logaritmi, calcola

$$\log_2 \left(\tfrac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}\right)$$

Soluzione. Applichiamo il teorema del logaritmo di un quoziente

$$\left(\log_2 4 + \log_2 \sqrt[3]{2}\right) - \log_2 \sqrt{8} = \log_2 2^2 + \log_2 2^{\frac{1}{3}} - \log_2 2^{\frac{3}{2}}$$

$$2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

Esercizio 8. Applicando i teoremi sui logaritmi, calcola

$$\log_5 \sqrt{125 \cdot \tfrac{1}{5^7}}$$

Soluzione. Riscriviamo

$$\log_5 \left(\frac{125}{5^7}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\log_5 125 - \log_5 5^7\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\log_5 5^3 - \log_5 5^7\right) = \frac{1}{2}(3-7) = -2$$

ricordiamo che l'argomento e la base di un logaritmo devono essere positivi, ma il risultato può essere negativo (ricordare la forma grafica del logaritmo o il codominio della funzione $y = \log_a x$).

Esercizio 9. Trasformare le espressioni applicando i teoremi sui logaritmi

$$\log(abc) \quad \log(a^2 b) \quad \log\frac{a}{2b} \quad \log(x+y)^2 \quad \log\sqrt[3]{\frac{3a}{b^2}}$$

Soluzione. Ricordando i teoremi

$$\log(abc) = \log a + \log b + \log c$$

$$\log\left(a^2 b\right) = 2\log a + \log b$$

$$\log\frac{a}{2b} = \log a - \log 2 - \log b$$

$$\log(x+y)^2 = 2\log(x+y)$$

$$\log\sqrt[3]{\frac{3a}{b^2}} = \log\left(\frac{3a}{b^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(\log 3 + \log a - 2\log b)$$

Esercizio 10. Applicando i teoremi sui logaritmi, ridurre a un unico logaritmo

$$\log 4 + \log 3$$

Soluzione. L'esercizio è l'inverso dei precedenti

$$\log 4 + \log 3 = \log(4 \cdot 3) = \log 12$$

Esercizio 11. Applicando i teoremi sui logaritmi, ridurre a un unico logaritmo

Soluzione. $2\log 5 - 3\log 2$

$$2\log 5 - 3\log 2 = \log 25 - \log 8 = \log \frac{25}{8}$$

Cambiamento di base

Esercizio 12. Applicando le proprietà dei logaritmi, la formula del cambiamento di base e ricordando che $\log_{a^c} b^c = c$ e $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, verifica l'uguaglianza

$$\log_5 7 \cdot \log_7 4 = \log_5 4$$

Soluzione. Trasformiamo tutti i logaritmi in base 5

$$\log_7 4 = \frac{\log_5 4}{\log_5 7}$$

per cui

$$\cancel{\log_5 7} \cdot \frac{\log_5 4}{\cancel{\log_5 7}} = \log_5 4$$

Esercizio 13. Applicando le proprietà dei logaritmi, la formula del cambiamento di base e ricordando che $\log_{a^c} b^c = c$ e $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, verifica l'uguaglianza

$$\log_3 5 + \frac{1}{2\log_5 3} = \frac{3}{\log_5 9}$$

Soluzione. Trasformiamo tutti i logaritmi in base 5

$$\log_3 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 3}$$

per cui

$$\frac{\log_5 5}{\log_5 3} + \frac{1}{2\log_5 3} = \frac{2+1}{2\log_5 3} = \frac{3}{\log_5 9} = \frac{3}{\log_5 9}$$

Esercizio 14. Verificare l'uguaglianza

$$\log_{ab} a = \frac{1}{1 + \log_a b}$$

Soluzione. Trasformiamo tutti i logaritmi in base a

$$\log_{ab} a = \frac{\log_a a}{\log_a ab} = \frac{1}{\log_a a + \log_a b} = \frac{1}{1 + \log_a b}$$

per cui

$$\frac{1}{1 + \log_a b} = \frac{1}{1 + \log_a b}$$

Esercizio 15. Verificare l'uguaglianza

$$a^{\log_{\frac{1}{a}} b} = \frac{1}{b}$$

Soluzione. Applichiamo la definizione di logaritmo

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_{\frac{1}{a}} b$$

per cui

$$-\log_a b = \frac{1}{\log_b \frac{1}{a}} = -\frac{1}{\log_b a} = -\log_a b$$

Esercizio 16. Verificare l'uguaglianza

$$\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$$

Soluzione. Operiamo sul secondo membro

$$\frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c} = \frac{\frac{\log_{ab} c}{\log_{ab} a} \cdot \frac{\log_{ab} c}{\log_{ab} b}}{\frac{\log_{ab} c}{\log_{ab} a} + \frac{\log_{ab} c}{\log_{ab} b}} = \frac{\frac{(\log_{ab} c)^{\cancel{2}}}{\cancel{\log_{ab} a \cdot \log_{ab} b}}}{\frac{\cancel{\log_{ab} c}(\log_{ab} b + \log_{ab} a)}{\cancel{\log_{ab} a \cdot \log_{ab} b}}} = \frac{\log_{ab} c}{\log_{ab} b + \log_{ab} a}$$

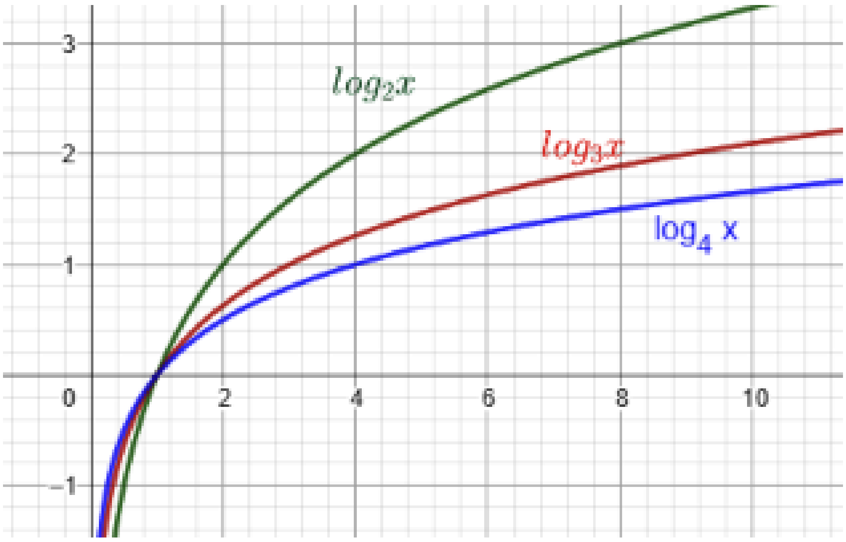
ma applicando il teorema del logaritmo di un prodotto

$$\frac{\log_{ab} c}{\log_{ab} b + \log_{ab} a} = \frac{\log_{ab} c}{\log_{ab} ab} = \log_{ac} c$$

Funzione logaritmica

Esercizio 17. Disegnare nello stesso piano cartesiano i grafici delle funzioni di equazione $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ e $y = \log_4 x$. Dall'osservazione dei tre grafici dedurre il comportamento della funzione logaritmica con $a > 1$, al crescere della base a.

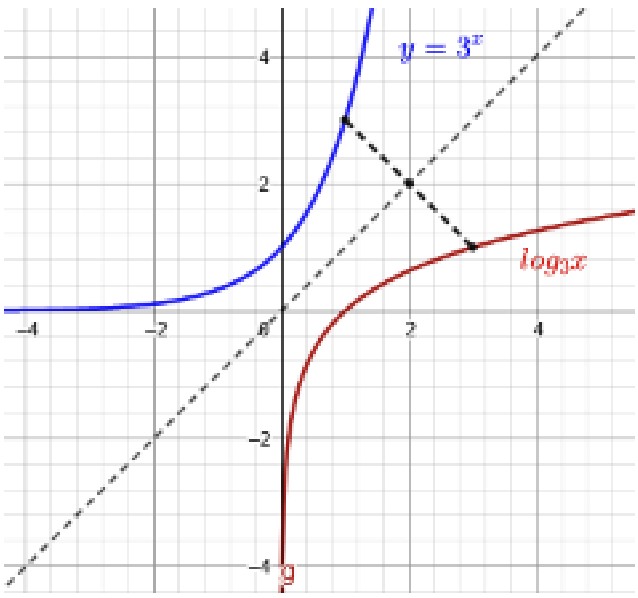
Soluzione. I tre grafici sono ottenuti tramite il software di geometria dinamica "Geogebra"



Al crescere della base a il ramo negativo decresce più rapidamente, mentre il ramo positivo cresce più lentamente.

Esercizio 18. Disegnare nello stesso piano cartesiano i grafici delle funzioni $y = 3^x$ e $y = \log_3 x$ e dall'osservazione individuare la simmetria tra le due curve.

Soluzione. I grafici sono ottenuti tramite il software di geometria dinamica "Geogebra"



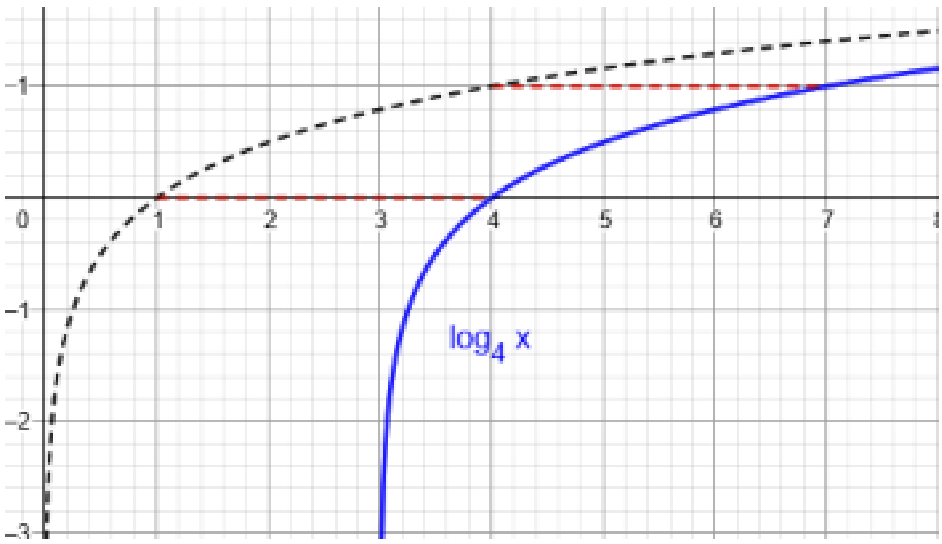
La funzione logaritmo è l'inversa della funzione esponenziale; le curve, come ci si deve attendere, mostrano una simmetria assiale con asse dato dalla bisettrice del I e III quadrante di equazione $y = x$.

Esercizio 19. Trovare il dominio della funzione

$$y = \log_4 (x - 3)$$

Soluzione. Ricordiamo che la funzione $y = \log_a x$ è definita con $a > 0$ nel sottoinsieme dei reali $x > 0$. Pertanto nella funzione data la prima condizione $(a > 0)$ è soddisfatta e si deve studiare quando l'argomento soddisfa la seconda condizione, cioè il dominio sarà (scritto in forma insiemistica)

$$(3; +\infty)$$



Come si può osservare, la funzione $\log_4 (x - 3)$ è la traslazione verso destra di 3 unità della $y = \log_4 x$.

Esercizio 20. Trovare il dominio della funzione

$$y = \log_x \left(x^2 - 6x\right)$$

Soluzione. Il dominio della funzione sarà l'insieme dei valori di x per i quali sia l'argomento del logaritmo sia la base sono positivi

$$x^2 - 6x > 0 \quad x < 0 \ \vee \ x > 6$$

$$x > 0$$

L'intervallo comune alle due condizioni ottenute è $(6; +\infty)$

Esercizio 21. Trovare il dominio della funzione

$$y = \log_x \frac{x-1}{2-x}$$

Soluzione. Il dominio della funzione sarà l'insieme dei valori di x per i quali sia l'argomento del logaritmo sia la base sono positivi

$$\frac{x-1}{2-x} > 0 \qquad \begin{matrix} N > 0 & x > 1 \\ D > 0 & x < 2 \end{matrix} \qquad 1 < x < 2$$

$$x > 0$$

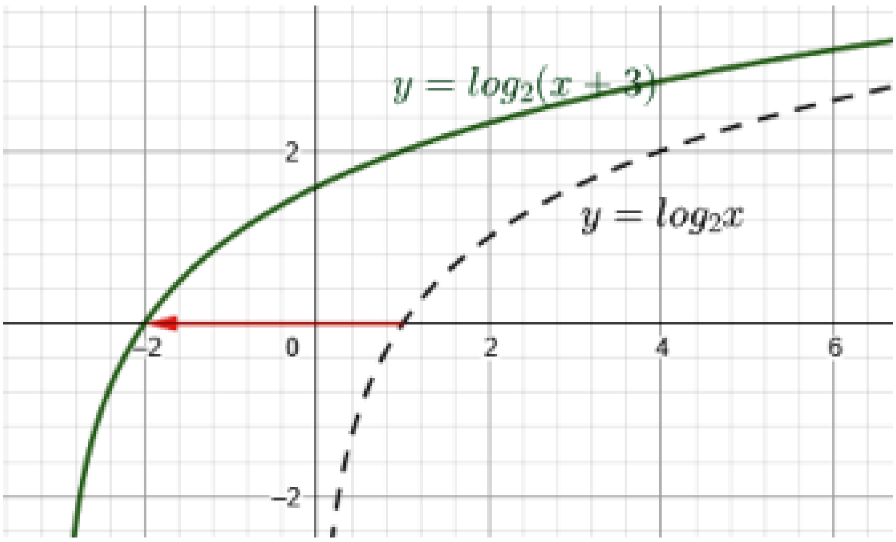
L'intervallo comune alle due condizioni ottenute è $(1; 2)$

Trasformazioni delle curve logaritmiche

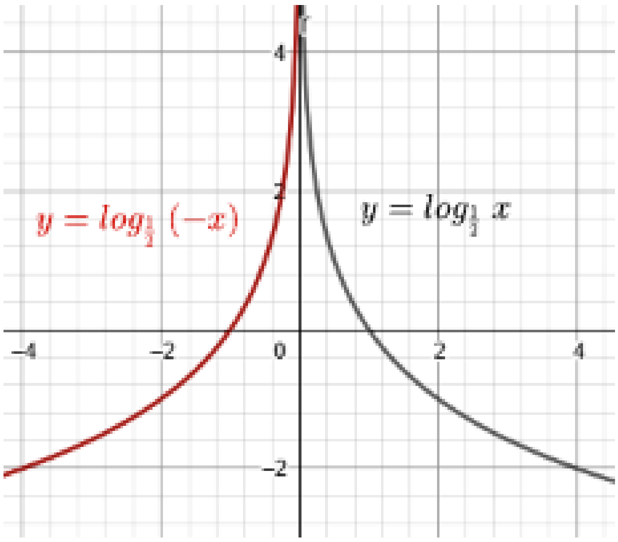
Esercizio 22. Dal grafico della curva di equazione $y = \log_a x$ dedurre, utilizzando opportune trasformazioni geometriche, il grafico delle seguenti funzioni

$$y = \log_2(x+3) \quad y = \log_{\frac{1}{2}}(-x) \quad y = 2\log_2 \frac{x}{2}$$

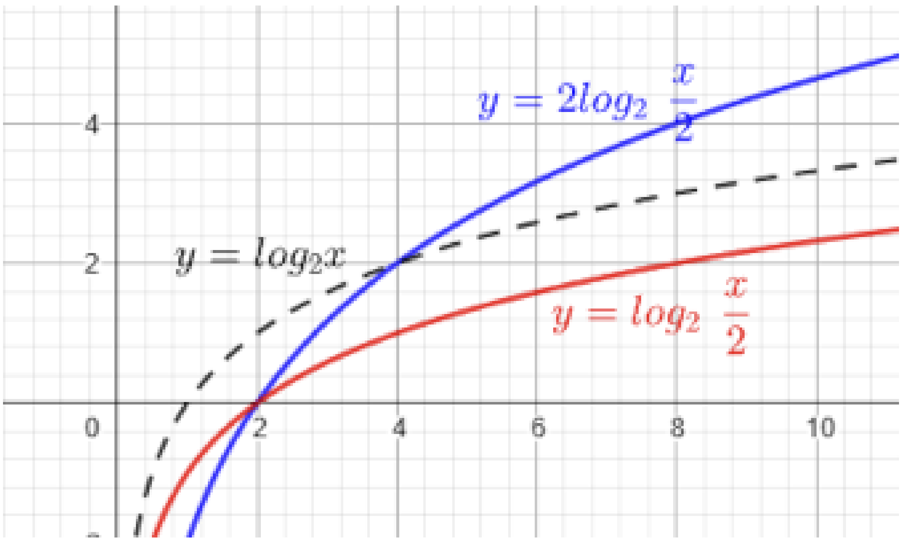
Soluzione. La prima funzione ha dominio $x > -3$ e rappresenta la traslazione orizzontale della funzione di base verso sinistra di 3 unità.



La seconda funzione ha come dominio $x < 0$ e la funzione è la simmetrica di quella di base rispetto all'asse y (dovuto all'inversione del segno di x)



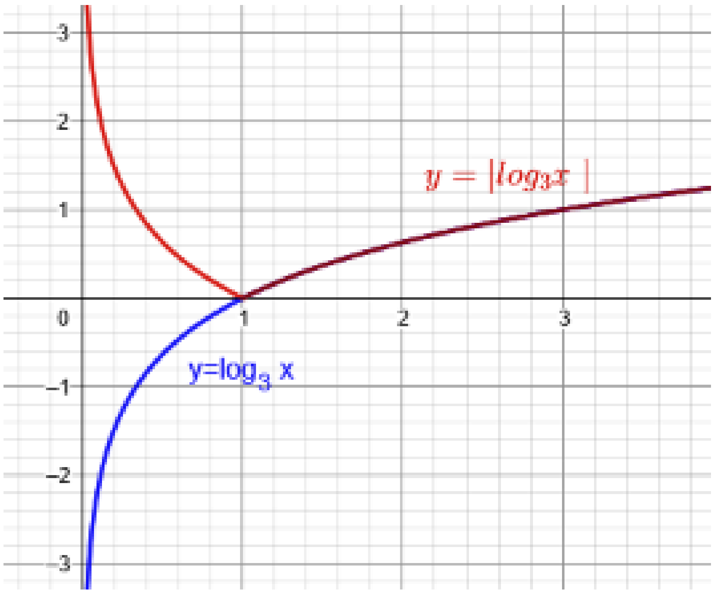
La terza funzione ha dominio $x > 0$ e rappresenta una dilatazione orizzontale (argomento $= \frac{x}{2}$) e una dilatazione verticale (2 a moltiplicare il logaritmo)



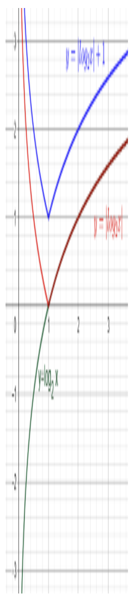
Esercizio 23. Dal grafico della curva di equazione $y = \log_a x$ dedurre, utilizzando opportune trasformazioni geometriche, il grafico delle seguenti funzioni

$$y = |\log_3 x| \quad y = |\log_2 x| + 1 \quad y = |\log_2 |x||$$

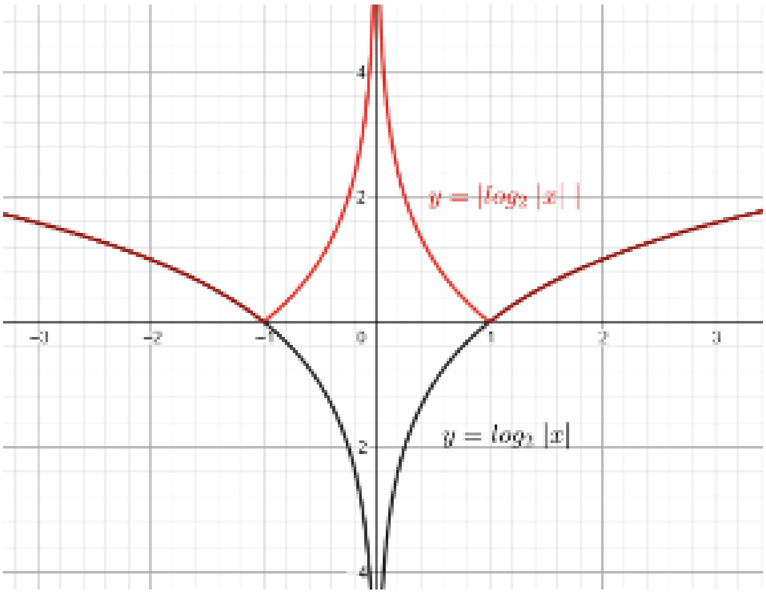
Soluzione. La prima funzione ha dominio $x > 0$; il valore assoluto della funzione implica la simmetria del ramo negativo rispetto all'asse x, mentre il ramo positivo si sovrappone a quello della funzione base.



La seconda funzione ha come dominio $x > 0$ e si ha la simmetria del ramo negativo rispetto all'asse x e la successiva traslazione verticale di 1 unità verso l'alto



La terza funzione ha per dominio l'intero insieme dei numeri reali; il grafico del logaritmo del modulo dell'argomento si ottiene aggiungendo alla curva della funzione di base la sua simmetrica rispetto all'asse y (ricordare il significato del modulo di un numero); il modulo della funzione così ottenuto implica ancora la simmetria dei rami negativi rispetto all'asse x.



Equazioni esponenziali risolvibili mediante logaritmi

Per ottenere il valore dell'incognita, l'esponente della potenza, si deve applicare la definizione di logaritmo e si utilizza tutte le volte in cui l'esponenziale è confrontato con un termine non riducibile ad una potenza avente la stessa base.

Esercizio 24. Risolvi le seguenti equazioni esponenziali, trasformando il risultato in logaritmi in base 10

$$2^x = 10 \quad 5^{2x-3} = 4 \quad 3^{1-x} = 16 \quad 21^{x-1} = 15^x$$

Soluzione. Risolviamo applicando la definizione di logaritmo e la formula di cambia della base

$$2^x = 10 \quad x = \log_2 10 \quad x = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}$$

$$5^{2x-3} = 4 \quad 2x - 3 = \log_5 4 \quad x = \frac{\log_5 4 + 3}{2} = \frac{\frac{\log 4}{\log 5} + 3}{2} = \frac{\log 4 + 3\log 5}{\log 25}$$

$$3^{1-x} = 16 \quad 1 - x = \log_3 16 \quad x = 1 - \log_3 16 = 1 - \frac{\log 16}{\log 3}$$

$$21^{x-1} = 15^x \quad \frac{21^x}{21} = 15^x \left(\frac{21}{15}\right)^x = 21 \quad x = \log_{\frac{7}{5}} 21 = \frac{\log 21}{\log 7 - \log 5}$$

Esercizio 25. Risolvi la seguente equazione esponenziali

$$\frac{3^x \cdot 9^{1+x}}{6^{2-x}} = 1$$

Soluzione. Tutti gli esponenziali sono definiti per ogni valore di x. Raggruppiamo le tre potenze

$$\frac{3^x \cdot 3^{2+2x}}{2^{2-x} \cdot 3^{2-x}} = 1$$

$$3^{x+2+2x-2+x} = 2^{2-x}$$

$$3^{4x} = \frac{4}{2^x} \qquad 81^x \cdot 2^x = 4$$

$$162^x = 4$$

$$x = \log_{162} 4 = \frac{\log 4}{\log 162}$$

Esercizio 26. $2^x + 3 \cdot 2^{x+1} = 4$

Soluzione. Riscriviamo, applicando le proprietà delle potenze

$$2^x + (3 \times 2) \cdot 2^x = 4$$

cioè

$$2^x = \frac{7}{4} \quad x = \log_2 \frac{7}{4} \quad x = \frac{\log 7 - \log 4}{\log 2}$$

Esercizio 27. $9^{x+\frac{1}{2}} + 3^{2x-1} = 2 \cdot 5^{x+1}$

Soluzione. Riscriviamo, applicando le proprietà delle potenze

$$3^{2x+1} + 3^{2x-1} = (2 \times 5) \cdot 5^x$$

cioè

$$3^{2x}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 5^x$$

$$\frac{\cancel{10}}{3} \cdot 9^x = \cancel{10} \cdot 5^x$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)^x = 3 \quad x = \log_{\frac{9}{5}} 3 \quad x = \frac{\log 3}{2\log 3 - \log 5}$$

Esercizio 28. $\dfrac{5^x - 4}{5^x - 1} + \dfrac{4}{25^x - 5^x} = 0$

Soluzione. Riscriviamo,

$$\frac{5^x-4}{5^x-1}+\frac{4}{5^x\left(5^x-1\right)}=0$$

troviamo le condizioni di esistenza

$$C.E.\quad \begin{cases} 5^x-1\neq 0 \\ 5^x\left(5^x-1\right)\neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

sommiamo le frazioni con $mcm=5^x\left(5^x-1\right)$, avremo

$$5^x\left(5^x-4\right)+4=0$$

$$5^{2x}-4\cdot 5^x+4=0$$

introduciamo la sostituzione di variabile $5^x=t$ e avremo

$$t^2-4t+4=0$$

si riconosce il prodotto notevole $(t-2)^2=0$ per cui

$$t=2\quad 5^x=2\quad x=\log_5 2=\frac{\log 2}{\log 5}\ la$$

soluzione è accettabile dal confronto con le C.E.

Equazioni logaritmiche

Esercizio 29. Determinare il dominio della seguente equazione logaritmica e risolverla

$$\log\left(2x-1\right)+\log\left(3+x\right)=\log\left(x^2+1\right)$$

Soluzione. Ogni logaritmo è definito se il suo argomento è positivo (diamo per certo che la base lo sia; ricordiamo che il simbolo log sta per $\log_{10}$).

Studiamo il dominio, che sarà poi l'intervallo dei valori di x nei quali dobbiamo trovare la soluzione dell'equazione.

$$D:\ \begin{cases} 2x-1>0 \\ 3+x>0 \\ x^2+1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x>-3 \\ \forall x \end{cases} \qquad x>\frac{1}{2}$$

Risolviamo ora applicando le proprietà dei logaritmi

$$\log\left(2x-1\right)\left(3+x\right)=\log\left(x^2+1\right)$$

e passando agli argomenti

$$6x+2x^2-x-3=x^2+1$$

$$x^2+5x-4=0$$

le soluzioni dell'equazione risolvente sono

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$$

ma nel dominio determinato avremo soltanto

$$x=\frac{\sqrt{41}-5}{2}$$

Esercizio 30. Determinare il dominio della seguente equazione logaritmica e risolverla

$$\log \frac{x+3}{x^2} = \log (4-x)$$

Soluzione. Studiamo il dominio, che sarà poi l'intervallo dei valori di x nei quali dobbiamo trovare la soluzione dell'equazione.

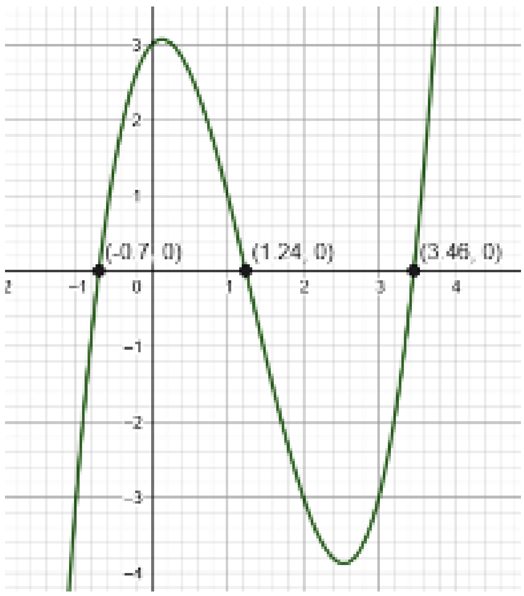
$$D: \begin{cases} \frac{x+3}{x^2} > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N > 0 & x > -3 \\ D > 0 & \forall x \neq 0 \\ x < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} fraz > 0 & -3 < x < 0 \ \vee \ x > 0 \\ x < 4 \end{cases} \quad -3 < x < 0 \ \vee \ 0 < x < 4$$

Risolviamo passando agli argomenti

$$\frac{x+3}{x^2} = 4-x$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$$

la regola di Ruffini per la scomposizione non è applicabile con numeri facilmente individuabili, per cui risolviamo graficamente, rappresentando per punti la funzione di 3° grado e osservando dove interseca l'asse x (ci aiutiamo con Geogebra)



Le soluzioni (arrotondate) nel dominio determinato, sono $x_1 \simeq -0,7$, $x_2 \simeq 1,24$, $x_3 \simeq 3,46$.

Esercizio 31. Trovare le soluzioni della seguente equazione logaritmica

$$\frac{1}{2} \log (9-x) = \log 3 + \frac{1}{2} \log x$$

Soluzione. Studiamo il dominio, che sarà poi l'intervallo dei valori di x nei quali dobbiamo trovare la soluzione dell'equazione.

$$D: \begin{cases} 9-x>0 \\ x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<9 \\ x>0 \end{cases} \quad 0<x<9$$

Applichiamo la proprietà dei logaritmi

$$\log \sqrt{9-x} = \log 3\sqrt{x}$$

passando agli argomenti

$$\sqrt{9-x} = 3\sqrt{x}$$

elevando al quadrato nel dominio

$$9-x = 9x$$

si ha la soluzione accettabile

$$x = \frac{9}{10}$$

Esercizio 32. Trovare le soluzioni della seguente equazione logaritmica

$$\frac{1}{2}\log\left(x-\sqrt{5}\right) = \log\left(7-x^2\right) - \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{5}\right)$$

Soluzione. Studiamo il dominio, che sarà poi l'intervallo dei valori di x nei quali dobbiamo trovare la soluzione dell'equazione.

$$D: \begin{cases} x-\sqrt{5}>0 \\ 7-x^2>0 \\ x+\sqrt{5}>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\sqrt{5} \\ -\sqrt{7}<x<\sqrt{7} \\ x>-\sqrt{5} \end{cases} \quad \sqrt{5}<x<\sqrt{7}$$

Applichiamo la proprietà dei logaritmi e portiamo a primo membro il termine $-\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{5}\right)$

$$\log\sqrt{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)} = \log\left(7-x^2\right)$$

passando agli argomenti

$$\sqrt{x^2-5} = 7-x^2$$

elevando al quadrato nel dominio

$$x^2-5 = 49+x^4-14x^2$$

riscriviamo ordinando l'equazione biquadratica

$$x^4-15x^2+54=0$$

poniamo $x^2=t$ con $5<t<7$ e avremo $t^2-15t+54=0$

$$t_1=6 \quad t_2=9$$

la sola soluzione accettabile è

$$x=\sqrt{6}$$

Esercizio 33. Trovare le soluzioni della seguente equazione logaritmica

$$\frac{1}{5}\log(x+2) = 3 + \log 0,002$$

Soluzione. Dominio dell'equazione.

$$D: \ x > -2$$

Applichiamo la proprietà dei logaritmi e ricordiamo che $3 = \log 10^3$

$$\log \sqrt[5]{x+2} = \log\left(10^3 \times 0,002\right)$$

passando agli argomenti

$$\sqrt[5]{x+2} = 2$$

elevando

$$x + 2 = 32$$

la sola soluzione è accettabile

$$x = 30$$

Esercizio 34. Trovare le soluzioni della seguente equazione logaritmica

$$\log(4x-1) - \log(3x-1) = \log(1+x) - \log(1-x)$$

Soluzione. Dominio dell'equazione.

$$D: \begin{cases} 4x-1>0 \\ 3x-1>0 \\ 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x > \frac{1}{3} \\ x > -1 \\ x < 1 \end{cases} \quad \frac{1}{3} < x < 1$$

Può essere utile sostituire alle sottrazioni delle addizioni, per evitare la presenza di divisioni

$$\log(4x-1) + \log(1-x) = \log(1+x) + \log(3x-1)$$

applichiamo le proprietà dei logaritmi

$$\log[(4x-1)(1-x)] = \log[(1+x)(3x-1)]$$

passando agli argomenti e moltiplicando

$$4x - 4x^2 \cancel{-1} + x = 3x \cancel{-1} + 3x^2 - x$$

$$7x^2 - 3x = 0$$

la sola soluzione è accettabile

$$x = \frac{3}{7}$$

Esercizio 35. Trovare le soluzioni della seguente equazione logaritmica

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0$$

Soluzione. Dominio dell'equazione.

$$D: \ x > 0$$

Come per le equazioni esponenziali possiamo risolvere mediante la sostituzione $t = \log_2 x$. Avremo

$$t^2 + t - 2 = 0$$

risolvendo

$$t_1 = -2 \quad t_2 = 1$$

passando ai logaritmi

$$\begin{aligned} \log_2 x = -2 \quad & x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ \log_2 x = 1 \quad & x = 2 \end{aligned}$$

Esercizio 36. Risolvere

$$\frac{5}{\log x + 4} - \frac{3}{\log x - 2} = 4$$

Soluzione. equazione logaritmica fratta, per cui oltre alle condizioni di esistenza del logaritmo vanno aggiunte le condizioni di esistenza delle frazioni

$$C.E: \begin{cases} x > 0 & esistono\, i\, logaritmi \\ \log x + 4 \neq 0 & esistono\, le\, frazioni \\ \log x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 10^{-4} \\ x \neq 10^2 \end{cases}$$

Moltiplichiamo per il minimo comune multiplo $mcm = (\log x + 4)(\log x - 2)$ e avremo

$$5(\log x - 2) - 3(\log x + 4) = 4(\log x + 4)(\log x - 2)$$

svolgiamo i calcoli indicati

$$5\log x - 10 - 3\log x - 12 = (4\log x + 16)(\log x - 2)$$

$$2\log x - 22 = 4\log^2 x - 8\log x + 16\log x - 32$$

infine riordinando e portando tutto al primo membro

$$4\log^2 x + 6\log x - 10 = 0$$

Proviamo a risolvere senza sostituzione, ma a considerare come incognita direttamente $\log x$

$$\log x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4} \begin{array}{l} \nearrow \ -\frac{5}{2} \\ \searrow \ 1 \end{array}$$

troviamo le soluzioni in x, entrambe accettabili.

$$x_1 = 10^{-\frac{5}{2}} \quad x = 10$$

Esercizio 37. $\dfrac{1+\log x}{\log x-3}-\dfrac{\log x-3}{\log x+3}=\dfrac{5\log x}{\log^2 x-9}$

Soluzione. equazione logaritmica fratta, per cui oltre alle condizioni di esistenza del logaritmo vanno aggiunte le condizioni di esistenza delle frazioni

$$C.E:\begin{cases} x>0 & & esistono\,i\,logaritmi \\ \log x-3\neq 0 & \log x\neq 3 & esistono\,le\,frazioni \\ \log x+3\neq 0 & \log x\neq -3 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1000 \\ \log x\neq \frac{1}{1000} \end{cases}$$

(Scegliamo un'altra strada) Risolviamo ora semplificando la scrittura mediante la sostituzione $\log x=t$; si avrà

$$\frac{1+t}{t-3}-\frac{t-3}{t+3}=\frac{5t}{t^2-9}$$

rendiamo intera l'equazione moltiplicando i due membri per il $mcm=t^2-9$:

$$(1+t)(t+3)-(t-3)^2=5t$$

svolgendo il calcolo si ha

$$t+3+t^2+3t-t^2+6t-9-5t=0$$

$$\begin{array}{lr} 5t-6=0 & t=\dfrac{6}{5} \\ \log x=\dfrac{6}{5} & x=10^{\frac{6}{5}}=10\sqrt[5]{10} \end{array}$$

Esercizio 38. $\dfrac{1}{\log^2 x-\log x}+\dfrac{1}{\log^2 x+\log x}=\dfrac{2}{\log^2 x-1}$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione scomponendo i polinomi al denominatore per calcolare le C.E. e il mcm.

$$\frac{1}{\log x(\log x-1)}+\frac{1}{\log x(\log x+1)}=\frac{2}{(\log x-1)(\log x+1)}$$

$$C.E:\begin{cases} x>0 \\ \log x\neq 0 \\ \log x\neq 1 \\ \log x\neq -1 \end{cases}\qquad\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x\neq 10 \\ x\neq \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Il $mcm=\log x(\log x-1)(\log x+1)$. Risolviamo semplificando la scrittura mediante la sostituzione $\log x=t$; si avrà

$$\frac{1}{t(t-1)}+\frac{1}{t(t+1)}=\frac{2}{(t-1)(t+1)}$$

e il $mcm = t(t-1)(t+1)$; moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm con le condizioni poste nelle C.E.

$$\cancel{t+1} + \cancel{t-1} = 2t$$

svolgendo il calcolo si ha

$$2t = 2t$$

l'equazione si riduce ad una identità, ed è quindi vera sempre; passando ai valori di x, le soluzioni sono

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ - \left\{\frac{1}{10}; 1; 10\right\}$$

Esercizio 39. $2\log(x-1) + \log(x-2) = \log(x^2 - 3x + 2)$

Soluzione. prima di impostare una qualsiasi procedura risolutiva è necessario studiare le condizioni di esistenza dei logaritmi presenti

$$C.E. \begin{cases} x-1>0 & x>1 \\ x-2>0 & x>2 \\ x^2-3x+2>0 & x<1 \ \vee \ x>2 \end{cases}$$

la soluzione comune del sistema sarà pertanto $C.E: x>2$. Applichiamo ora le proprietà dei logaritmi per riscrivere l'equazione in una forma più conveniente

$$\log(x-1)^2 + \log(x-2) = \log[(x-1)(x-2)]$$

passando agli argomenti

$$(x-1)^2(x-2) = (x-1)(x-2)$$

raccogliamo a fattor comune dopo aver portato tutti i termini al 1° membro:

$$(x-1)(x-2)^2 = 0$$

le soluzioni saranno pertanto

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 2$$

tutte non accettabili per le $C.E.$

Esercizio 40. $4\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 5\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) + 1 = 0$

Soluzione. Determiniamo le condizioni di esistenza del logaritmo: $C.E: x>0$. L'equazione si risolve riconoscendo una struttura simile ai polinomi di secondo grado non più in x ma in $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$. Sostituendo $t = \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$, avremo

$$4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$t_1 = 1 \qquad t_2 = \frac{1}{4}$$

le soluzioni saranno

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 1 \qquad x = \frac{1}{2}$$
$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4} \qquad x = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$$

Esercizio 41. $\log_5(x-2) + \log_5(x^2-25) - \log_5(x-5) = 1$

Soluzione. Le condizioni di esistenza si riassumono nel sistema

$$C.E. \begin{cases} x-2>0 & x>2 \\ x^2-25>0 & x<-5 \ \vee x>5 \quad \Rightarrow x>5 \\ x-5>0 & x>5 \end{cases}$$

Riscriviamo l'equazione per evitare la presenza di frazioni

$$\log_5(x-2) + \log_5\left(x^2-25\right) = \log_5(x-5) + \log_5 5$$

Applicando le proprietà dei logaritmi e passando agli argomenti si ha

$$(x-2)(x-5)(x+5) - 5(x-5) = 0$$

Spostando tutto al primo membro e raccogliendo a fattor comune, si ottiene

$$\begin{aligned} (x-5)\left(x^2+3x-10-5\right) &= 0 \\ (x-5)\left(x^2+3x-15\right) &= 0 \end{aligned}$$

le soluzioni saranno

$$x = 5 \qquad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{2}$$

tutte le tre soluzioni sono da considerare non accettabili perché non appartenenti al $C.E.$; l'equazione è impossibile.

Esercizio 42. $x \log_2 3 = \log_2(2-3^{-x})$

Soluzione. Le condizioni di esistenza sono

$$2-3^{-x}>0 \quad \tfrac{1}{3^x}<2 \quad 3^x>\tfrac{1}{2} \quad x>\log_3\tfrac{1}{2}$$

Riscriviamo l'equazione applicando le proprietà dei logaritmi

$$\log_2 3^x = \log_2\left(2-3^{-x}\right)$$

passando agli argomenti si ha un'equazione esponenziale in x

$$3^x = 2 - \frac{1}{3^x}$$

l'esponenziale al denominatore, come prima, è sempre definito

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$$

poniamo $3^x = t$

$$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0$$

le soluzioni in t sono

$$t = 1$$

e in x

$$3^x = 1 \quad x = 0$$

Esercizio 43. $\log_6 (4^{1-x} + 2) - \log_6 2 = \log_6 (2^{2x+1} - 3)$

Soluzione. Le condizioni di esistenza sono

$$C.E. \left\{ \begin{array}{c} 4^{1-x} + 2 > 0 \\ 2^{2x+1} - 3 > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{c} 2^{2-2x} > -2 \\ 2^{2x} > \frac{3}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{c} \forall x \\ x > \log_2 \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} \right.$$

applicando le proprietà dei logaritmi e passando agli argomenti

$$4^{1-x} + 2 = 2\left(2^{2x+1} - 3\right)$$

si ha un'equazione esponenziale in x

$$2^{2-2x} = 2 \cdot 2^{2x+1} - 8$$

$$4 \cdot \frac{1}{4^x} = 4 \cdot 4^x - 8$$

dividiamo tutto per 4 e poniamo $4^x = t$

$$\frac{1}{t} = t - 2$$

cioè

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

le soluzioni in t sono

$$t_1 = 1 - \sqrt{2} \quad t_2 = 1 + \sqrt{2}$$

e in x

$$\begin{array}{ll} 4^x = 1 - \sqrt{2} & \qquad \textit{imposs.} \\ 4^x = 1 + \sqrt{2} & x = \log_4 \left(1 + \sqrt{2}\right) \; acc \end{array}$$

Esercizio 44. $x^{\log x} = 10$

Soluzione. Le condizioni di esistenza sono

$$C.E. \; x > 0$$

applicando la definizione di logaritmo e ricordando che $\log 10 = 1$

$$x^{\log x} = 10^1 = 10^{\log 10}$$

da cui

$$x = 10$$

Risoluzione grafica di sistemi ed equazioni

Esercizio 45. $\begin{cases} y = \log_{\frac{1}{2}} x \\ x - 2 = 0 \end{cases}$

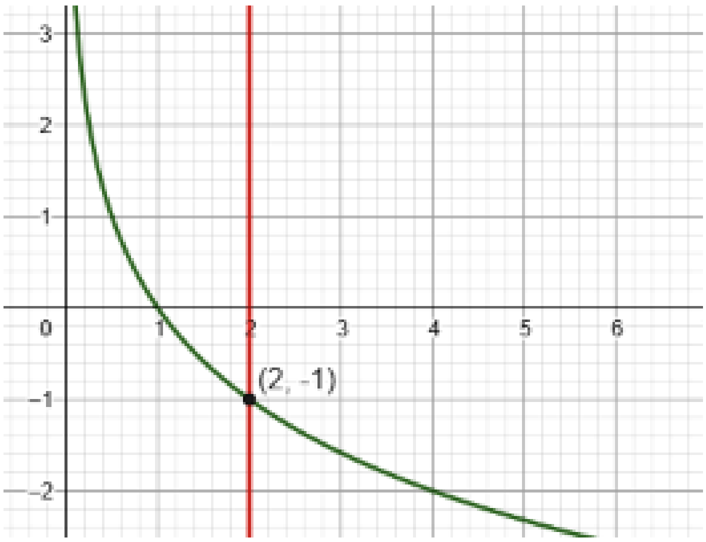
Soluzione. Le condizioni di esistenza sono

$$C.E.\ x > 0$$

La prima equazione è una funzione logaritmica con base $0 < a < 1$, per cui sarà decrescente; la seconda è la retta $x = 2$ parallela all'asse y; rappresentiamo graficamente e individuiamo il punto di intersezione tra le due curve, cioè il punto le cui coordinate soddisfano entrambe le relazioni.

[Per disegnare la curva logaritmica manualmente, si può ricorrere alla tabella di valori qui sotto per poi ricordare l'andamento delle funzioni logaritmiche decrescenti.

x	y
$\frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$
1	0
2	$\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
4	$\log_{\frac{1}{2}} 2^2 = -2$



Esercizio 46. $\begin{cases} y = \log_2 x \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$

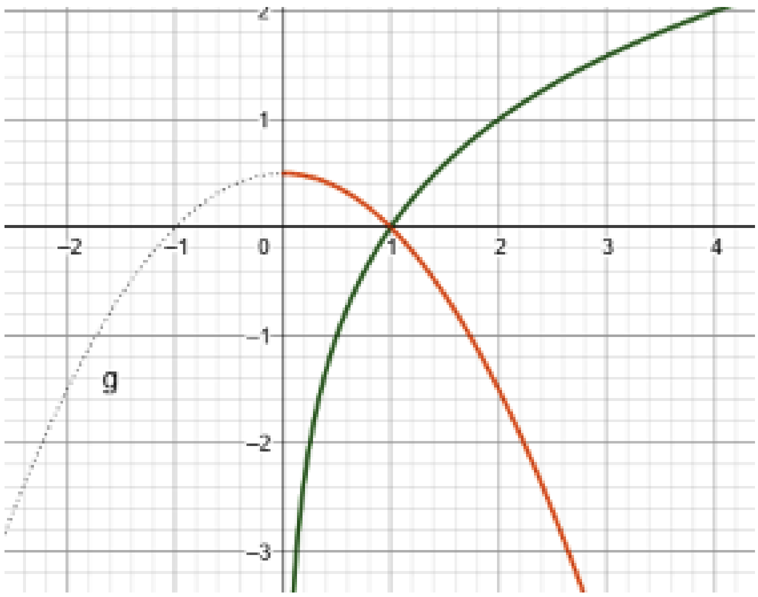
Soluzione. Le condizioni di esistenza sono

$$C.E.\ x > 0$$

La prima equazione è una funzione logaritmica con base $a > 1$, per cui sarà crescente; la seconda è l'equazione di una parabola con concavità verso il basso $(a < 0)$ e vertice sull'asse y $(b = 0)$; rappresentiamo graficamente e individuiamo l'intersezione tra la funzione logaritmica e il ramo con $x > 0$ della parabole.

[Per disegnare la curva logaritmica manualmente, si può ricorrere alla tabella di valori qui sotto per poi ricordare l'andamento delle funzioni logaritmiche decrescenti.

x	y
$\frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2} = -1$
1	0
2	$\log_2 2 = 1$
4	$\log_2 2^2 = 2$



Esercizio 47. $\log_{\frac{1}{2}} x + x = 1$

Soluzione. Le condizioni di esistenza sono

$$C.E.\ x > 0$$

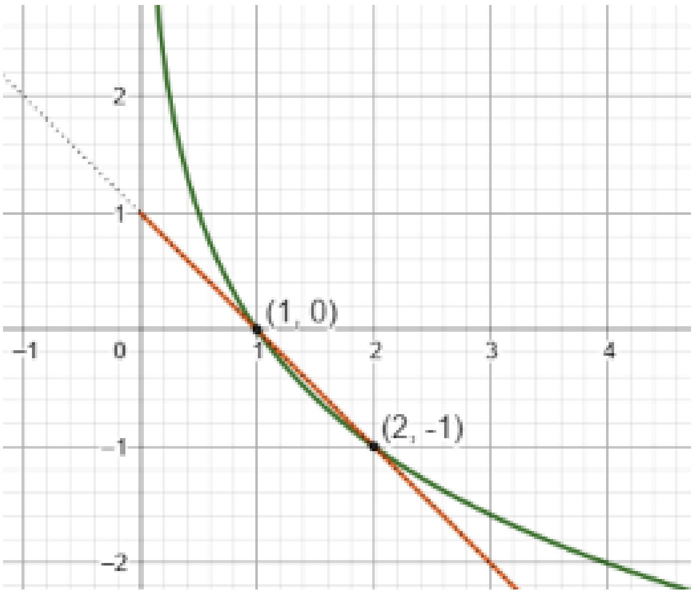
possiamo riscrivere come

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 1 - x$$

per cui ponendo $\log_{\frac{1}{2}} x = y$, si può avere il sistema

$$\begin{cases} y = \log_{\frac{1}{2}} x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

avremo una funzione logaritmica decrescente e una semiretta con $m = -1$ e $q = 1$.



Esercizio 48. $\log_3 x = \dfrac{3}{x}$

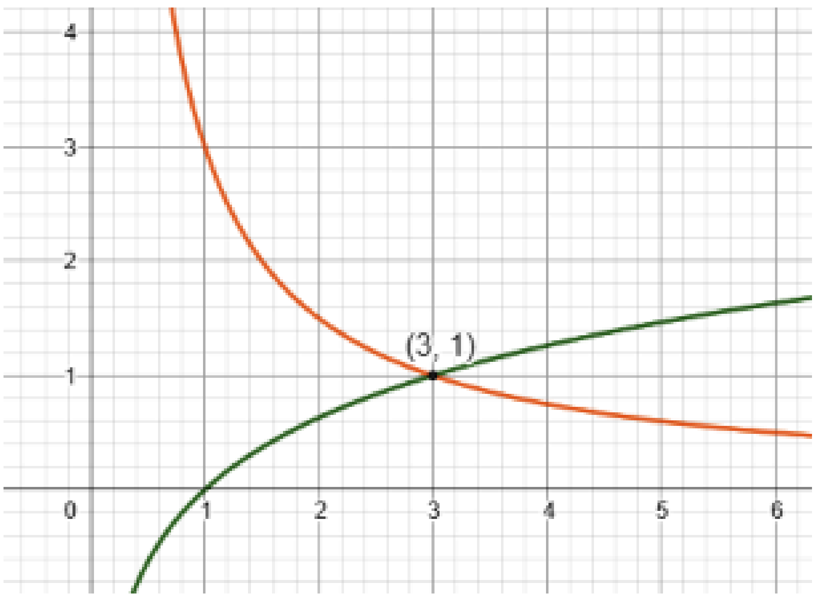
Soluzione. Le condizioni di esistenza, sia considerando il logaritmo e la frazione, sono

$$C.E.\ x > 0$$

per cui ponendo $\log_3 x = y$, si può avere il sistema

$$\begin{cases} y = \log_3 x \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases}$$

avremo una funzione logaritmica crescente e un ramo dell'iperbole equilatera nel primo quadrante.



DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Esercizio 49. $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) < 1$

Soluzione. Determiniamo le C.E.:

$$C.E. \begin{cases} x+1>0 & x>-1 \\ x-1>0 & x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$$

Riscrivo $\log_2(x+1) < \log_2(x-1) + \log_2 2$ e applico le proprietà dei logaritmi

$$x+1 < 2x-2$$

$$-3x < -3$$

$$x > 3$$

soluzioni accettabili

Esercizio 50. $\log(x^2 - 15x) > 2$

Soluzione. Determiniamo le C.E.:

$$C.E.\ x^2 - 15x > 0 \ \Rightarrow x < 0 \ \vee \ x > 15$$

Riscriviamo, $\log(x^2 - 15x) > \log 100$ e passiamo agli argomenti

$$x^2 - 15x - 100 > 0$$

$$x < -5 \ \vee \ x > 20$$

soluzioni accettabili

Esercizio 51. $\log_3 x + \log_3(x+1) > \log_3(x^2 - x) + 1$

Soluzione. Determiniamo le C.E.:

$$C.E. \begin{cases} x>0 \\ x+1>0 \\ x^2-x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>0 \\ x>-1 \\ x<0 \ \vee \ x>1 \end{cases} \quad x>1$$

Poiché $\log_3 3 = 1$ si ha

$$\log_3 x + \log_3(x+1) > \log_3\left(x^2 - x\right) + \log_3 3$$

applicando le proprietà dei logaritmi e passando agli argomenti

$$x(x+1) > 3x^2 - 3x$$

da cui

$$2x^2 - 4x < 0$$

e dividendo per 2

$$x^2 - 2x < 0$$

le soluzioni sono

$$0 < x < 2$$

ma per le C.E, si avrà

$$1 < x < 2$$

Esercizio 52. $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 > 0$

Soluzione. Determiniamo le C.E.:

$$C.E.\ x > 0$$

Introduciamo la sostituzione $\log_2 x = t$ e avremo

$$t^2 + t - 2 > 0$$

risolvendo rispetto a t

$$t < -2 \ \vee \ t > 1$$

e le soluzioni in x

$$\begin{array}{rl} \log_2 x < -2 & x < \frac{1}{4} \\ \log_2 x > 1 & x > 2 \end{array}$$

ma per le C.E., avremo

$$0 < x < \frac{1}{4} \ \vee \ x > 2$$

Esercizio 53. $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x+1}{x-1}\right) < \log_{\frac{1}{2}} x$

Soluzione. Determiniamo le C.E

$$C.E. \left\{ \begin{array}{c} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ x > 0 \end{array} \right.$$

il sistema contiene una disequazione che va risolta separatamente

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x > -1 \\ D > 0 & x > 1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -1 \ \vee \ x > 1 \\ x > 0 \end{array} \right. \quad x > 1$$

Risolviamo ora ricordando che, essendo la base minore di 1 la funzione logaritmica è decrescente e quindi, in pratica, dobbiamo invertire il verso della disequazione

$$\frac{x+1}{x-1} > x$$

questa è una disequazione fratta

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} - x &> 0 \\ \frac{x+1-x^2+x}{x-1} &> 0 \end{aligned}$$

cambiando i segni al numeratore e di conseguenza il verso della disequazione si ha

$$\frac{x^2-2x-1}{x-1} < 0$$

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x < 1-\sqrt{2} \ \vee x > 1+\sqrt{2} \\ D > 0 & x > 1 \end{array}$$

utilizzando il consueto schema grafico si ottengono le soluzioni

$$x < 1 - \sqrt{2} \qquad 1 < x < 1 + \sqrt{2}$$

e per le C.E

$$1 < x < 1 + \sqrt{2}$$

Esercizio 54. $\log_{0.5}\left(x - \frac{3}{2}\right) < -\log_{0.5} x$

Troviamo il campo di esistenza

$$C.E. \begin{cases} x - \frac{3}{2} > 0 & x > \frac{3}{2} \\ x > 0 & \end{cases} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

Risolviamo ora riscrivendo nel seguente modo (per evitare la presenza delle frazioni)

$$\log_{0.5}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \log_{0.5} x < 0$$

cioè

$$\log_{0.5}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \log_{0.5} x < \log_{0.5} 1$$

avremo quindi (invertendo il verso della disequazione perché un tale logaritmo è decrescente)

$$x\left(x - \frac{3}{2}\right) > 1$$

risolviamo

$$2x^2 - 3x - 2 > 0$$

l'equazione associata ammette le soluzioni $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$; la disequazione avrà come soluzioni $x < -\frac{1}{2} \ \vee \ x > 2$ ma per le condizioni di esistenza si avrà $x > 2$.

Esercizio 55. $\ln\left(\log\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) < 0$

Determiniamo le condizioni di esistenza

$$C.E. \begin{cases} \log\left(\frac{x-1}{x}\right) > 0 & \frac{x-1}{x} > 1 \\ \frac{x-1}{x} > 0 & \end{cases}$$

$$C.E. \begin{cases} \frac{x-1}{x} > 1 & \frac{x-1-x}{x} > 0 & -\frac{1}{x} > 0 & x < 0 \\ \frac{x-1}{x} > 0 & \begin{matrix} N > 0 \\ D > 0 \end{matrix} & \begin{matrix} x > 1 \\ x > 0 \end{matrix} & x < 0 \ \vee \ x > 1 \end{cases}$$

Le condizioni di esistenza sono allora

$$C.E: \ x < 0$$

Risolviamo ora la disequazione

$$\log\left(\frac{x-1}{x}\right) < 1 \qquad \log\left(\frac{x-1}{x}\right) < \log 10$$

$$\frac{x-1}{x} < 10 \qquad \frac{x-1-10x}{x} < 0$$

la disequazione da risolvere sarà infine

$$\frac{-9x-1}{x} < 0$$

Studiamola come tutte le precedenti disequazioni fratte determinando il segno del numeratore e denominatore

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x < -\frac{1}{9} \\ D > 0 & x > 0 \end{array} \Rightarrow x < -\frac{1}{9} \ \vee \ x > 0$$

ma per le condizioni di esistenza la sola soluzione possibile sarà $x < -\frac{1}{9}$

Risoluzione grafica di disequazioni logaritmiche

Esercizio 56. $\log_2 x > 1 - x$

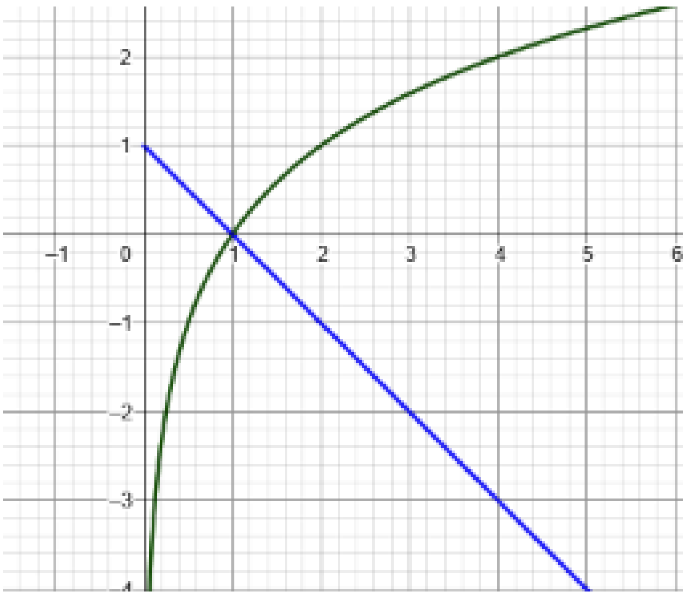
Soluzione. Le condizioni di esistenza, sia considerando il logaritmo e la frazione, sono

$$C.E. \ x > 0$$

per cui ponendo $\log_2 x = y$, si può avere il sistema

$$\begin{cases} y = \log_3 x \\ y > 1 - x \end{cases}$$

avremo una funzione logaritmica crescente e una semiretta con $m = -1$ e $q = 1$.



La disequazione è verificata per tutti i valori di $x > 1$.

Esercizio 57. $\log_2 x > \frac{1}{x} - 1$

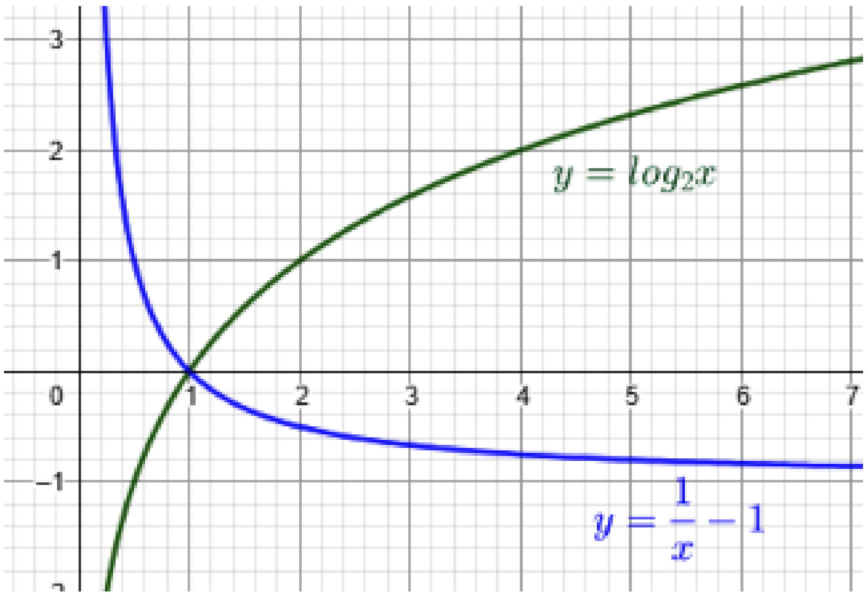
Soluzione. Le condizioni di esistenza, sia considerando il logaritmo e la frazione, sono

$$C.E. \ x > 0$$

per cui ponendo $\log_2 x = y$, si può avere il sistema

$$\begin{cases} y = \log_2 x \\ y > \dfrac{1}{x} - 1 \end{cases}$$

avremo una funzione logaritmica crescente e il ramo positivo dell'iperbole equilatera traslata verso il basso di una unità.



La disequazione è verificata per tutti i valori di $x > 1$.

Esercizio 58. $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 1 - x^2$

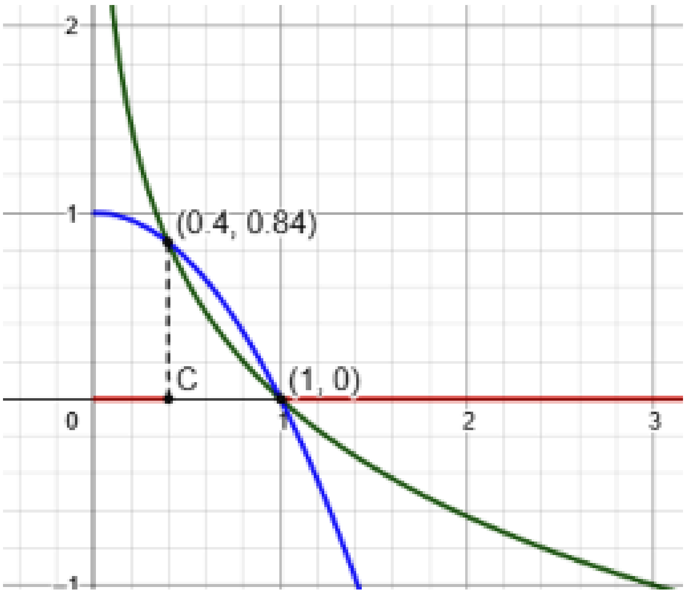
Soluzione. Le condizioni di esistenza, sia considerando il logaritmo e la frazione, sono

$$C.E. \ x > 0$$

per cui ponendo $\log_{\frac{1}{3}} x = y$, si può avere il sistema

$$\begin{cases} y = \log_{\frac{1}{3}} x \\ y > 1 - x^2 \end{cases}$$

avremo una funzione logaritmica decrescente e il ramo positivo della parabola con concavità rivolta verso il basso e vertice $V(0; 1)$ sull'asse y $(b = 0)$



La disequazione è verificata per $0 < x \leq 1$ e per $x \geq 1$.

Esercizio 59. Il tempo di dimezzamento del Ra^{226} (cioè ogni nucleo del radio ha 226 particelle, di cui 88 sono protoni e le rimanenti 138 sono neutroni) è pari a 1622 anni, cioè il numero degli atomi di Ra^{226} si riducono della metà dopo il tempo dato (ricordiamo che una mole di radio pari a $88\,g$ contiene un numero di Avogadro di atomi, cioè $6,022 \cdot 10^{23}$ atomi). Determinare il tempo necessario affinché il numero iniziale di atomi si riduca a 1/10 di quello iniziale, se la legge con cui si riduce è

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

dove T è appunto il tempo di dimezzamento.

Soluzione. L'equazione che esprime la legge di dimezzamento può essere riscritta (dividendo entrambi i membri per N_0, indicando che il numero di atomi iniziali è ininfluente)

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T}$$

sostituendo il valore di T

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda \times 1622}$$

l'unico elemento incognito è la costante λ, che calcoliamo applicando la definizione di logaritmo

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\lambda \times 1622} \qquad -1622\lambda = \ln\frac{1}{2} \left(= \ln 2^{-1} = -\ln 2\right)$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{1622} \qquad \lambda = 4,3 \cdot 10^{-4}$$

Sostituiamo ora il valore trovato per ottenere il tempo richiesto

$$\frac{N_0}{10} = N_0 e^{-4,3 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

operando come prima, si ottiene

$$t = \frac{\ln 10}{4,3 \cdot 10^{-4}} = 5388\,anni$$

Esercizio 60. La stella α Lyrae (Vega) ha magnitudine apparente $m_1 = 0,14$, mentre α Cygni (Deneb) ha magnitudine apparente $m_2 = 1,33$. Qual è il rapporto tra i flussi luminosi, F_1 e F_2, delle due stelle? Sappiamo che

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

Soluzione. Ricaviamo il rapporto tra i due flussi

$$\log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{m_2 - m_1}{2,5}$$

applicando la definizione di logaritmo (di base 10)

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{m_2 - m_1}{2,5}} = 10^{\frac{1.33 - 0,14}{2,5}} \simeq 3$$